

Ευθείες και Επιπέδα

Ορισμός 2 Ευθεία ονομάζεται το σύνολο $\ell_{P,v} = \{ p + tv : t \in \mathbb{R} \}$ και λέμε ότι $\ell_{P,v}$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο P και είναι εφαπτόμενο στο $v \neq 0$.

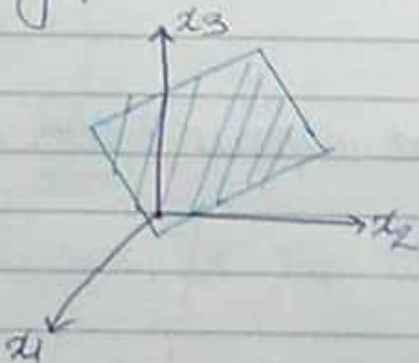
Είδαμε ότι μια ευθεία μπορεί να την περιγράψουμε είτε από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Είτε από την ανελυστική: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$.

Ορισμός 2 Επιπέδο ονομάζεται το σύνολο

$\pi_{P,v,k} = \{ p + tv + sw : t, s \in \mathbb{R} \}$, όπου v, k είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $p \in \mathbb{R}^3$.



Παρατήρηση: Τα επίπεδα που διέρχονται από το $O=(0,0,0)$ είναι υποχώροι διάστασης 2. Επομένως, τα επίπεδα είναι τριπλάσια μεταφοράς υποχώρων διάστασης 2.

Ερώτηση: Από ποιές εξισώσεις περιγράφεται ένα επίπεδο??

Προταση: Έστω $P=(x_0, y_0, z_0)$ σημείο του $\mathbb{R}^3$ και $v=(v_1, v_2, v_3)$, $w=(w_1, w_2, w_3)$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Το επίπεδο $\Pi_{P,v,w}$ περιγράφεται από

2) Παραμετρική εξίσωση

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 + s w_1 \\ y = y_0 + t v_2 + s w_2 \\ z = z_0 + t v_3 + s w_3 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

ii) Από τις ανισότητες εξισώσεις

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη

i) Εάν (x, y, z) είναι σημείο του επιπέδου τότε υπάρχουν $t, s \in \mathbb{R}$ τέω

$$(x, y, z) = P_0 + t \cdot v + s \cdot w,$$

22) Από τις παραθετικές εξισώσεις έχουμε

$$x - x_0 = tv_1 + sw_1$$

$$y - y_0 = tv_2 + sw_2$$

$$z - z_0 = tv_3 + sw_3$$

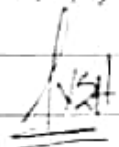
Ας υπολογίσουμε
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} tv_1 + sw_1 & tv_2 + sw_2 & tv_3 + sw_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} tv_1 & tv_2 & tv_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} sw_1 & sw_2 & sw_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρούμε το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $P = (1, 1, 1)$ και είναι κάθετο στα διανύσματα $v = (1, 0, 1)$ και $w = (0, 1, 0)$



Σύμφωνα με την προαναφερθείσα πρόταση, η εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-1)(-1) - (y-1)0 + (z-1) = -x+1+z-1 \Rightarrow$$

$$-x+z=0 \Leftrightarrow \boxed{x-z=0}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ένα επίπεδο θα περιγράφεται πάντα από μια αναλυτική εξίσωση της μορφής:

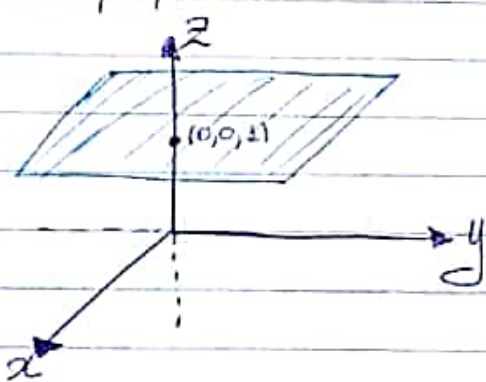
$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

ή ως μια ευθεία θα περιγράφεται από αναλυτικές εξισώσεις της μορφής:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Π/χ Είναι το $z=1$?

Είναι όλες οι τιμές των x και y ή τελειώνει συμπνομή είναι 1. Είναι ένα επίπεδο!



$$\boxed{z=1} \longleftrightarrow (x, y, 1)$$

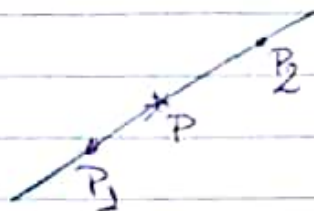
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η επιλογή των αλγεβρικών δεδομένων ανάλογα με στοιχειώδεις πράξεις της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορείτε να ορίσετε διάνυσμα μαζί τριών ανεξάρτητων σημείων ως εξής:

Θα λέτε σε το σημείο $P = (x, y, z)$ βρίσκεται μαζί των

Εννοιών $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.
 Εάν υπάρχει αριθμός $t \in (0, 1)$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \\ z = (1-t)z_1 + tz_2 \end{cases}$$



► Εξωτερικό - Εξωτερικό γινόμενο Αποδείξεις

Ορισμός: Το αριστερό εξωτερικό γινόμενο των $\mathbb{R}^3$ είναι η απεικόνιση $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \text{ όπου } v = (v_1, v_2, v_3) \text{ και } w = (w_1, w_2, w_3)$$

*** Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ***

i) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

ii) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

iii) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: Έστω $v = (v_1, v_2, v_3)$ είναι διανυσματά του $\mathbb{R}^3$, τότε ο αριθμός:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ λέγεται μήκος του } v$$

Πρόταση

Ισχύει η ιδιότητα

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

Πρόταση

(Ανισότητα Cauchy και Schwarz) Για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^3$

ισχύει

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Απόδειξη

Για $w=0$ η ανισότητα ισχύει. Ας εξετάσουμε την περίπτωση που $w \neq 0$. Θεωρούμε το τριώνυμο

$$0 \leq P(t) = \langle v+tw, v+tw \rangle = \|w\|^2 t^2 + 2\langle v, w \rangle t + \|v\|^2$$

Συνεπώς για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$\|w\|^2 t^2 + 2\langle v, w \rangle t + \|v\|^2 \geq 0$$

Θα πρέπει λοιπόν: $\langle v, w \rangle^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$

Επομένως $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \Leftrightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$.

Η ανισότητα ισχύει όταν το τριώνυμο $P(t)$ έχει μια ρίζα, δηλαδή όταν $v+tw=0 \Leftrightarrow \boxed{v/w}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ισχύει η ανισότητα $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, και η ισότητα ισχύει όταν $v \parallel w$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για κάθε μ μηδενική $v, w \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για $\theta \in [0, \pi]$ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $v, w \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Τα διανυσματα v, w είναι κάθετα, όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$ δηλαδή, όταν $\langle v, w \rangle = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

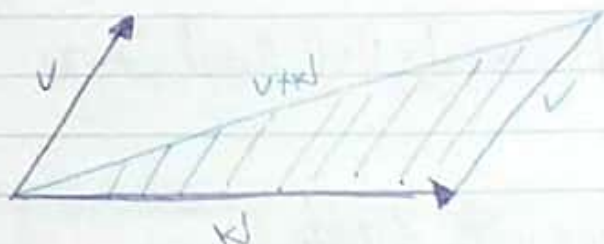
Μια βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ορθοκανονική όταν $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

δηλαδή όταν τα διανυσματα έχουν μέτρο 1 και είναι κάθετα μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η αλληλογόννη βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι ορθοκανονική.

ΠΡΟΤΑΣΗ (τργωνική ανισότητα)

Για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^3$ ισχύει: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Απόδειξη

Γίνεται χρήση της ανισότητας $\frac{1}{2}$ Cauchy-Schwarz
εξάγε:

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Επομένως: $\boxed{\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}$

Οπρίων

Το εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι η απεικόνιση $x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει το

$$v \cdot w = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3$$

$$v \cdot w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

(5)

Πρόταση 0 οποιαδήποτε λειτουργία κράδης είναι

αρχή/αξ:

$$V \times W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Πρόταση ΤΟΤ ΕΞΟΤΕΡΙΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Πρόταση

Για τυχόντα $u, v, z \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής:

i) $u \times v = -v \times u$

ii) $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$

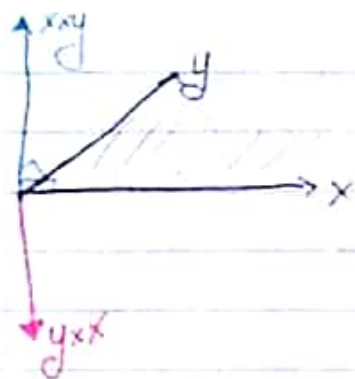
iii) $(u+v) \times z = u \times z + v \times z$

Πρόταση

Για τυχόντα $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$ ισχύουν:

i) $\langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \langle x, y \times z \rangle$

Επίσης $\boxed{x \times y = 0}$ αν και μόνο αν $\boxed{\|x\|y}$. Επιπρόσθετα το $x \times y$ είναι κάθετο στο x και στο y .



$$ii) (x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$$

$$iii) \langle x \times y, z \times w \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle x, w \rangle \\ \langle y, z \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}$$

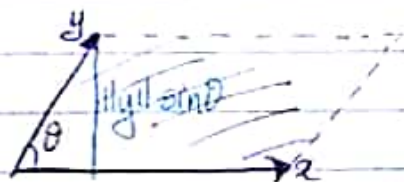
$$iv) \|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Από την σχέση $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \theta$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$



$$\Rightarrow \|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin \theta$$

Άρα $\|x \times y\|$ δίνει παραλληλογραμμο εμβαδόν x, y .

Το εσωτερικό γινόμενο $\rightarrow$ αριθμοί $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$

Το εξωτερικό γινόμενο $\rightarrow$ διανύσματα $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$



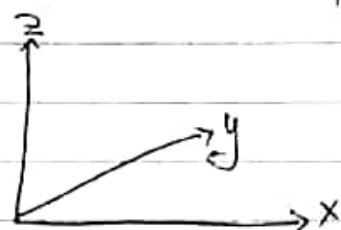
Απόδειξη της προτάσεως

(6)

$$i) \text{ Έχουμε ότι } \langle x_{xy}, z \rangle = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \langle x, y \times z \rangle.$$

ii) Στην περίπτωση που xy δεν είναι να δείξουμε ότι διότι η ισοτιμία προς απόδειξη λαμβάνει τη μορφή

$0=0$.
 Ας εστιάσουμε λοιπόν στην περίπτωση κατά την οποία τα x, y είναι μη μηδενικά και μη παράλληλα.
 Τότε τα διανύσματα $\{x, y, x \times y\}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.



Έτσι θα έχουμε ότι

$$\boxed{(x \times y) \times z} = \lambda x + \mu y + \kappa (x \times y)$$

Επειδή το $(x \times y) \times z$ είναι κάθετο στο $x \times y$, το $\kappa = 0$!

$$\text{Επομένως } (x \times y) \times z = \lambda x + \mu y.$$

Αρκεί να υπολογίσουμε τα λ και μ .

Υπολογίζουμε την πρώτη συνιστώσα του $(x \times y) \times z$ και βρίσκουμε

$$\langle x, z \rangle y_1 - \langle y, z \rangle x_1 \quad \text{Η πρώτη συνιστώσα του } \lambda x + \mu y$$

$$\text{είναι } \lambda x_1 + \mu y_1$$

Σωστός πρέπει:

$$\lambda = -\langle y, z \rangle \text{ και } \mu = \langle x, z \rangle$$

iii) Θεωρείς $v = x \times y$

$$\text{Έστω: } \langle \boxed{x \times y}, z \times w \rangle = \langle v, z \times w \rangle =$$

$$= \langle v \times z, w \rangle = \langle (x \times y) \times z, w \rangle$$

$$= \langle \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x, w \rangle$$

$$= \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle$$

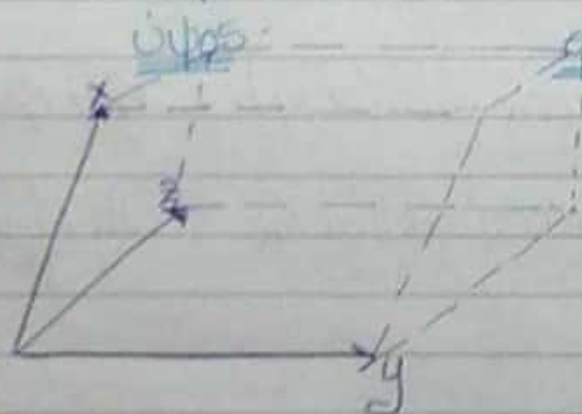
2v) Αφού από την (iii) αν $z = x$ και $w = y$.

Παρατήρηση

(Περίεργη επίλυση του $|\langle x, y \times z \rangle|$)
Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, τότε $|\langle x, y \times z \rangle| =$

$$= \|x\| \cdot \|y \times z\| |\cos \angle(x, y \times z)|$$

$$= \underbrace{\{\|x\| |\cos \angle(x, y \times z)|\}}_{\text{ύψος}} \cdot \underbrace{\|y \times z\|}_{\text{απόσταση}}$$



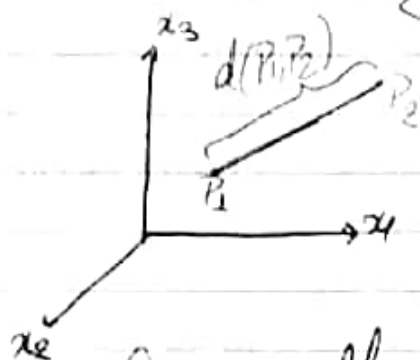
← Για να βρούμε
για να βρούμε
παραλληλότητα

• Για το $\langle x, y, z \rangle$ περιγράφει τον ογκό του παραλληλεπίπεδου με ακμές τα x, y, z . Για τα x, y, z είναι γραμμικά εγχειρήματα, αν $\langle x, y, z \rangle = 0$.

► ΙΣΟΤΕΡΙΑ

Ορισμός - Ανάμεσα δύο σημείων $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ τον αριθμό

$$d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



Προσφέρουν να ορίσετε την γεωμετρική ισοτιμία απεικονίζοντας την ισοτιμία. Δηλαδή απεικονίσεις που διατηρούν τα μήκη.

Ορισμός - Μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται ισοτιμία αν διατηρεί τις αποστάσεις των σημείων, δηλαδή αν ισχύει:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \\ \|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|. \end{cases}$$

Με την έννοια της ισοτιμίας μπορεί να ορίσετε ~~ισοτιμία~~ ισοτιμία τμημάτων, γωνιών, τριγώνων κ.λπ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Να ταξινομηθούν οι ισοτιμίες του $\mathbb{R}^3$.

Πριν δώσετε απάντηση ως θυμνάτε την ενοια των ορθογώνιων τινάχων.

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια γραμμική απεικόνιση $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται ορθογώνιος μετασχηματισμός εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή εάν

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^3$$

Ας αβολοκατε με

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \text{ του πίνακα της } g$$

ως προς την αυξημένη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή,

$$\begin{cases} g(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3 \\ g(e_2) = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3 \\ g(e_3) = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 \end{cases}$$

Επειδή

$$\langle g(e_1), g(e_1) \rangle = 1$$

$$\langle g(e_1), g(e_2) \rangle = 0$$

$$\langle g(e_1), g(e_3) \rangle = 0$$

$$\langle g(e_2), g(e_3) \rangle = 0$$

$$\langle g(e_2), g(e_2) \rangle = 1$$

$$\langle g(e_3), g(e_3) \rangle = 1$$

Ο πίνακας A έχει την ιδιότητα:

$$A^t A = {}^t A \cdot A = I_3$$

Σύμφωνα με θεωρήμα του Euler μπορεί να βρούμε ορθογώνια βάση ως προς την οποία οι πλεγμαί της g λαμβάνει μια από τις παρακάτω μορφές:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \sin \theta \neq 0$

vi) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \sin \theta \neq 0.$